פריסה לינארית ומרחב האפס

פריסה לינארית (Span) ומרחב האפס (Null Space)

הקדמה - צירוף לינארי

Definition

יהי V מרחב וקטורי ויהיו $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ וסקלרים $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$.
צירוף לינארי של $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ הוא כל ביטוי מהצורה:

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n$$

- הסקלרים $k_1, \dots, k_n$ נקראים **המקדמים** של הצירוף הלינארי
- כל צירוף לינארי של וקטורים ב-V הוא בעצמו וקטור ב-V (בגלל סגירות המרחב לחיבור ולכפל בסקלר)

דוגמה:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

זהו צירוף לינארי של $\vec{v}_1$ ו-$\vec{v}_2$ עם מקדמים $k_1 = 3,\ k_2 = -2$.

חלק א' - פריסה לינארית (Span)

הגדרה

יהי V מרחב וקטורי ו-$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$.

הפריסה הלינארית של $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ היא אוסף כל הצירופים הלינאריים האפשריים:

$$\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} = \left\{ k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n \;\middle|\; k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Definition

$\mathrm{Span}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ הוא **המרחב הפרוש** (Spanned Space) - המרחב הקטן ביותר המכיל את כל הוקטורים $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$.

תכונות ה-Span

תכונה 1

$$\vec{0} \in \mathrm{Span}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$$

כי: $0\cdot\vec{v}_1 + 0\cdot\vec{v}_2 + \dots + 0\cdot\vec{v}_n = \vec{0}$

תכונה 2 - סגירות לחיבור

אם $\vec{u}_1,\vec{u}_2 \in \mathrm{Span}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$, אז $\vec{u}_1+\vec{u}_2 \in \mathrm{Span}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$.

הוכחה:

$$\vec{u}_1 = k_1\vec{v}_1 + \dots + k_n\vec{v}_n$$
$$\vec{u}_2 = \ell_1\vec{v}_1 + \dots + \ell_n\vec{v}_n$$
$$\vec{u}_1+\vec{u}_2 = (k_1+\ell_1)\vec{v}_1 + \dots + (k_n+\ell_n)\vec{v}_n \in \mathrm{Span}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$$

תכונה 3 - סגירות לכפל בסקלר

אם $\vec{u} \in \mathrm{Span}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ וסקלר $k \in \mathbb{R}$, אז $k\vec{u} \in \mathrm{Span}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$.

הוכחה:

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n$$
$$k\vec{u} = (k\alpha_1)\vec{v}_1 + \dots + (k\alpha_n)\vec{v}_n \in \mathrm{Span}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$$

Tip

מתכונות 1-3 נובע ש-$\mathrm{Span}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ הוא **תת-מרחב** של V.

תכונה 4 - כל וקטור כלול

לכל $1 \le i \le n$: $\vec{v}_i \in \mathrm{Span}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$.

תכונה 5 - כל תת-מרחב המכיל את הוקטורים מכיל את ה-Span

אם $W \subseteq V$ הוא תת-מרחב המכיל את $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$, אז $\mathrm{Span}\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\} \subseteq W$.

שיטה לבדיקה אם וקטור שייך ל-Span

לבדוק אם $\vec{V} \in \text{Span}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$, יש לפתור את המשוואה:

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \cdots + k_n\vec{u}_n = \vec{V}$$

אם קיים פתרון - הוקטור שייך ל-Span. אחרת - לא.

דוגמאות Span

דוגמה 1

האם $\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ שייך ל-$\text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ כאשר:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

פתרון: פותרים $k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 = \vec{V}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{גוריד}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1$$

$$\vec{V} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \implies \vec{V} \in \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

דוגמה 2 - פולינומים

$$g(t) = -3 + 4t + t^2$$

בסיס:

$$p_1(t) = 5 - 2t + t^2, \quad p_2(t) = -3t + 2t^2, \quad p_3(t) = 3 + t$$

פתרון: פותרים $g(t) = k_1p_1(t) + k_2p_2(t) + k_3p_3(t)$:

$$\begin{cases} 5k_1 + 3k_3 = -3 \\ -2k_1 - 3k_2 + k_3 = 4 \\ k_1 + 2k_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = -3, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 4$$

$$g(t) = -3p_1(t) + 2p_2(t) + 4p_3(t)$$

דוגמה 3 - וקטורים במרחב כללי

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

בדיקה: האם $\bar{V} \in \text{Span}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$?

פתרון: פותרים $k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_2 + k_3\bar{u}_3 = \bar{V}$:

$$\begin{cases} 2k_1 - 3k_2 + k_3 = -1 \\ k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 3 \\ 4k_1 + 8k_3 = 4 \\ -k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ -k_2 - k_3 = -1 \\ 3k_1 + 5k_2 + 11k_3 = 8 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{דירוג}} k_1 = -1, \ k_2 = 0, \ k_3 = 1$$

$$\bar{V} = -\bar{u}_1 + 0 \cdot \bar{u}_2 + \bar{u}_3 \implies \bar{V} \in \text{Span}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$$

חלק ב' - מרחב האפס (Null Space)

הגדרה

עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, **מרחב האפס** של A מוגדר:

$$\text{Nul}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

Definition

$\mathrm{Nul}(A)$ הוא אוסף כל פתרונות המערכת ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$.
ניתן להוכיח ש-$\mathrm{Nul}(A)$ הוא **תת-מרחב** של $\mathbb{R}^n$.

שיטה לחישוב $\mathrm{Nul}(A)$

1. דרג את המטריצה A לצורה מדורגת מצומצמת (RREF)
2. בטא את המשתנים הקשורים בעזרת המשתנים החופשיים
3. כתוב את הפתרון הכללי בצורת Span

דוגמה - חישוב $\mathrm{Nul}(A)$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

שלב 1 - דירוג:

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שלב 2 - פתרון כללי (x_2, x_4, x_5 חופשיים):

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 = -2x_4 + 2x_5 \end{cases}$$

שלב 3 - כתיבה כ-Span:

$$\vec{u} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}}$$

סיכום

מושג	הגדרה	הערות
$\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$	כל הצירופים הלינאריים של הוקטורים	תת-מרחב של V
$\mathrm{Nul}(A)$	פתרונות $A\vec{x} = \vec{0}$	תת-מרחב של $\mathbb{R}^n$
בדיקת שייכות ל-Span	פתור $k_1v_1 + \cdots + k_nv_n = \vec{V}$	קיים פתרון $\Leftrightarrow$ שייך
חישוב Nul	דרג A ל-RREF, בטא בחופשיים	כתוב כ-Span של וקטורים